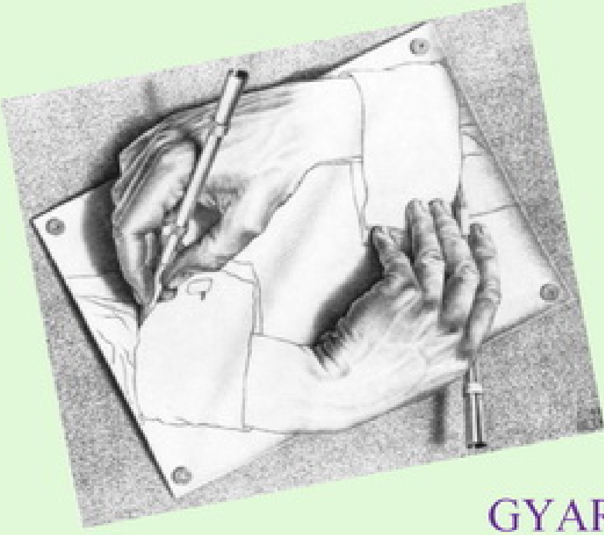
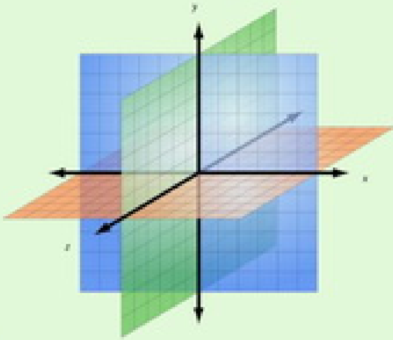
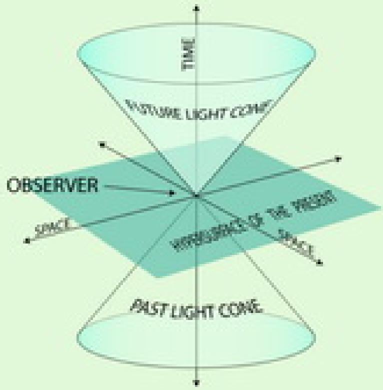
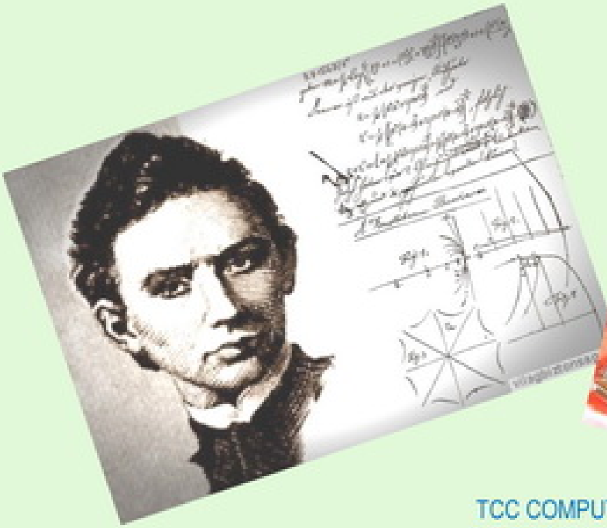




GYARMATI PÉTER



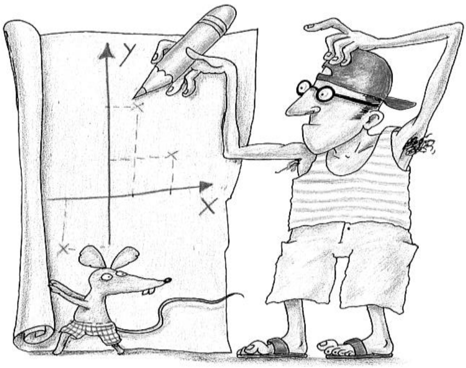
A TÉR SZEMLÉLETE, A DIMENZIÓK



TCC COMPUTER STUDIO

Gyarmati Péter

A TÉR SZEMLÉLETE, A DIMENZIÓK



TCC COMPUTER STUDIO
2017

Lektorálták:
Dr. Csörgő Tamás, fizikus, az Európa Akadémia tagja,
Dr. Dömölki Bálint, matematikus, kandidátus,
Dr. Kádár György, fizikus, emeritus professzor,
Dr. Varga László, matematikus,

akiknek megkülönböztetett köszönetemet fejezem ki a magam és a reménybeli olvasók részéről.

A grafikák részben a szerző rajzai, mások internet forrásúak és az alábbi jogok valamelyikének alapján láthatóak ebben a kiadványban.

Képzeljünk el egy olyan világot, amelyikben minden egyes ember osztozik az összes, lehetséges tudásban.

Összefoglaló jegyzet Tudományos Önképző Köri előadások alapján.
www.gyarmati.tk
www.szalon.tk
www.tudos.tk

ISBN 978-615-5789-01-4

Copyright ©Gyarmati Péter, 2017
Ez a kiadvány oktatási célra szabadon felhasználható, másolása, sokszorosítása a kiadó kizárólagos joga.

TARTALOMJEGYZÉK

A borító képei:

- M. C. Escher holland grafikus: Rajzoló kezek;
- 3D koordinátasíkok;
- a Minkowski-tér;
- Bólyai János és kézirat részlete;
- Descartes és Christina svéd királyné vitája:
  Nils Forsberg (1842-1934) festményén, részlet.

1 Bevezetés

Hová tettem a kulcsaim? Hányadik emeleten laksz? Mekkorát, nőtt a gyerek? Melyik busz visz a Főtérre? Messze van még a múzeum? Milyen hosszú volt ez a séta, pedig csak két órát tartott? Hány liter benzint tankoltál? Mikor és hol találkozunk? Csak néhány kiragadott kérdés a mindennapjainkból, amelyekre többé-kevésbé adunk pontos választ. Akár így, kár úgy a félreértések legtöbbször bajokhoz, problémákhoz, sokszor tragédiákhoz vezetnek – szinte csupa ilyenből áll az életünk. Pedig!

Csak keveset kell tennünk, hogy az ilyen értelmű félreértéseket csökkentsük, minimalizáljuk! Ha megfigyeljük kérdéseinket és a válaszokat, azt találjuk, hogy vannak közös részei: mindegyikben egyaránt megtalálható egy *alappont* és valamilyen *mérték*.

Az alappont az a kiinduló hely, amelyhez viszonyítva egy-egy mérték – távolság, magasság, valamilyen mennyiség – *megadásával határozzuk meg a szóban forgó dolog helyét, idejét*.

Ebben a tanulmányban a dolgok helyével foglalkozunk, az idő kérdésével az ugyanettől a szerzőtől származó, *Az idő nyomában* című, könyv foglalkozik.

Nyilvánvaló tehát, hogy szükségünk van egy olyan rendszerre, amivel a válaszok – a dolgok helye – egyértelműen és pontosan megadhatók lesznek. Vagyis elkerülhetjük evvel, ha nem is mindörökké, de legalább csökkenthetjük a minden bajok okozóját, a félreértést, azt, hogy a dolgokat nem ugyanúgy értelmezzük, ahogy a másik fél.

Kiváló példa egy ilyen rendszerre a XX. századi Budapesten élők számára ismert kifejezés a „hétre ma várom a Nemzetinél” mögött található ismeret, rendszer. Az időpontot tekintve egyértelmű, hogy az esti óráról van szó, mivel a pesti ember reggel 7-kor még csak ébredezik. Az idő pontosságát a városban szerte – a Nemzetinél is – található, hirdető oszlopok tetején elhelyezett, villanyóra adta. A hely a – 70-es években teljesen jó állapota ellenére lebontott – Nemzeti akkor A hozzáveszi, hogy B délre van és így, helyesen, a C városba jut. Ugyanez történik a másik félnél is, ahogy az ábra jobb oldalán látjuk.

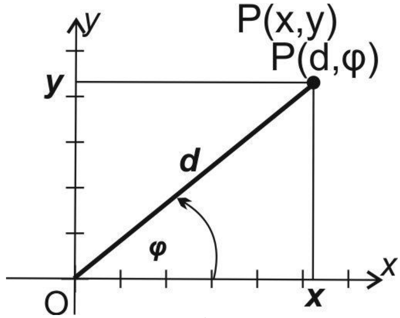
A tér-idő szemlélet megértése.

1884-ben már második kiadásban jelent meg Dr. E. Abott Síkföld című könyve, szellemi játéka, amelyben síkban élő értelmes lényeket ábrázol, akik nem érzékelnek semmit ezen a két-dimenzión kívül és nem tudnak lejönni arról a felszínről, sőt nincsenek is tudatában bármi másról.

2. ábra. A Síkföld eredeti kiadása.

Képzeljük el, írja, hogy egy gömb leszáll Síkföldre és áthatol rajta. Vajon minek fogják ezt a jelenséget tekinteni az ottani alakosok?

Átszámítás a derékszögű és a polár koordináták között

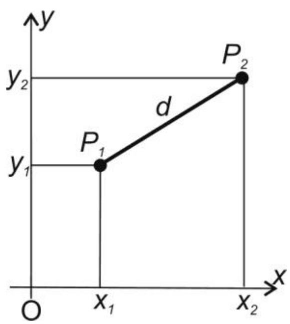


11. ábra. Átszámítás

Derékszögűből polárba: $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$; $d = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Polárból derékszögűbe: $x = d\cos\varphi$; $y = d\sin\varphi$.

Két pont távolsága derékszögű síkkoordináta-rendszerben



12. ábra. Ortogonális távolság

Két pont távolságának meghatározásában most is a Pitagorasz-tétel segít.

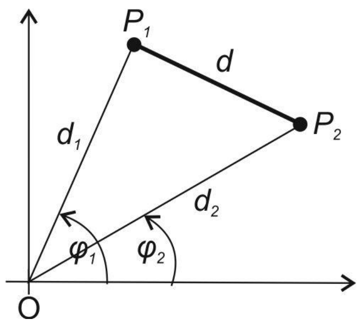
A koordináta különbségek a befogók - $\left(x_2 - x_1\right)$ *és* $\left(y_2 - y_1\right)$ - a távolság az átfogó, tehát derékszögű háromszöget alkotnak, így a Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \; .$$

Gyakran használjuk a távolság négyzet kifejezést: $d^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$.

Két pont távolsága polár síkkoordináta-rendszerben

A két pont távolságai az origótól – helyvektoroknak nevezzük -, d_1, d_2 és a keresett d távolság általános háromszöget alkot.



13. ábra. Poláris távolságmérés

A koszinusz-tétel segítségével: $d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$.

A szögek, miként az ábrán láthatjuk, a helyvektorok hajlásszögei, és a különbségük a *d* távolsággal szembeni szög.

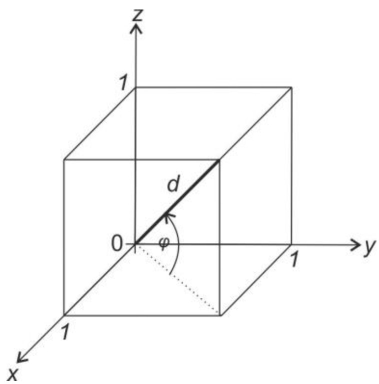
Koordináta-transzformáció

Mindennapos fizikai gyakorlat, hogy ha egy koordináta-rendszerről egy másikra térünk át, azaz ugyanazt az eseményt egy másik –

$$d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1} = \sqrt{n+1}$$

Tehát a rekurzió algebrailag: $d_{n+1} = \sqrt{d_n^2 + 1} = \sqrt{n+1}$ és geometriailag: egy derékszögű háromszög, melynek egyik befogója egységnyi, a másik a korábbi távolság és az átfogó a következő távolság, a Pitagorasz-tétel segítségével: $d_{n+1}^2 = d_n^2 + 1$.

Az első esetben ez egy egységnyi távolság, majd egységnyi oldalú négyzet átlója, ezt az egységnyi élű kocka testátlója követi és így tovább – általánosítva -, egy n-dimenziós kocka test átlója. Nevezzük ezt *hiperkockána*k!



30. ábra. Kocka, hiperkocka

Következmény

Teremtettünk tehát egy olyan sok-dimenziós euklideszi teret – hiszen nem tettünk kivételt egyetlen szabály alól sem – amely *n>3* esetekben a földi természetben nem értelmezhető, de mégis létezik és nagyon jól használható. Pontosabban így fogalmazzuk: Az *n*-dimenziós, ortogonális koordináta-rendszerünk koordinátái rendre $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$, amelyek mindegyike egy-egy számegyenes, közötti kapcsolatokat. Ezekről elég komoly ismereteink vannak úgy, mint hit, vallás hierarchiái, hatalmi berendezkedések a törvényeikkel, erőszakszervezeteikkel, közigazgatásaikkal. Mivel ezek jelentős befolyásolók az egyes pontokat elmozdítják a helyükről, szándékaik szerint rendezik azokat, vagyis az embereket. Következésképp megváltoznak az emberek többi dimenzióbeli értékei - tömegek fedésbe kerülnek, sőt egy pontba tömörülnek, mint például katonák, azonos vallásúak, egy pártállásúak, stb. Ráadásul ezeket rezgéseknek, hullámoknak tartják a "hozzáértők". A hullámok pedig korlátlanul leírhatóak valamilyen Fourier függvényekkel, állítják, és akkor elegendően sok ilyen függvény segítségével, egy szuper-komputeren ezek a dimenziók feltárulnak - a belehelyezett ember vizsgálható: megállapíthatóak lesznek az ilyen dimenziók szerinti állapotuk, változtathatóvá, befolyásolhatóvá válnak.

Vajon ezen ismérvek szerint megkülönböztethető-e, hogy a természet részeként létező, avagy természetfölötti-e az ember. Ha nem, akkor mi értelme az egésznek?

Eddig tartott a szellem dimenziói felvetés, szakirodalomra nem hivatkozom, azt mindenki érdeklődése szerint maga találja meg.

A társadalmi hálózatok

Meg kell jegyeznem, hogy a hálózattudomány[26] - többek között - ilyen jellegű társadalmi hálózatokkal is foglakozik. Közismert társadalmi hálózat például a Facebook, amely ugyan eléggé együgyű, mégis elég sok dimenziós, mivel megismerhetjük benne egyes személyek más-más szempontú tulajdonságait, vagy megtalálhatók benne a tagjai kapcsolatai: barátságok, vélemények, családi közösségek, iskolai végzettségek, stb. szerint. Ezek mindegyike felfogható, mint egy-egy dimenzió a Facebook terében. Belépéskor és használat közben a tagok adatokat mondanak magukról, eseményekről számolnak be. Ezeket témánként rendezve, azaz

[26] P. G. Gyarmati: Some words about Networks,. 2011. TCC COMPUTER STUDIO.

Vagy virtuális világot építhetünk és összekapcsolhatjuk a valósággal és tudásunk segítségével ide-oda mozoghatunk bennük.

Mindennaposak az ilyen szerkesztésű mozi-filmjeink és képzeletünkben okosabbak és szebbek is lehetünk a sztároknál, és legyőzhetjük a hódító törököket és boldogan élhetünk megvívott hazánkban, és még hosszasan sorolhatnám új világot alkotó elképzeléseinket.

Itt van még a mindenféle tervezés, a jövő létesítésének ügye is, amelyek során megvalósítható és megvalósíthatatlan terveket szövünk, reformokkal változtatgatjuk az életünket, kibúvunk, mártirkodunk és még, ki tudja, miket cselekszik a sok érintett ember, vagy társadalom. Ha más nincs, elvonulunk a képzelet világába, kábítószerekkel, betegségben, sokszor egészségesen is a színház, az irodalom, vagy éppen a saját fantáziánk útján. Ezek mind-mind más távlatokat - én dimenzióknak nevezem - nyitnak időlegesen, hogy megnyugtassuk lelki dimenzióinkat, hogy visszaállva normális voltunkba folytathassuk életünket az elérhető, kézzelfogható három-, négydimenziós világunkban.

Szóval vannak dimenzióink, nem is kevés!

Fizikai pont dinamikus helyzete

A klasszikus fizika tere.

Egy másik érdekes példánk fizikai probléma lesz, nevezetesen a térben mozgó pont helymeghatározása. A pont helyét egy számhármas írja le – három-dimenziós tér – $P(x, y, z)$.

Ha ez a pont mozog ebben a térben, akkor a helye időfüggővé válik: t_0 időpontban $P_0(x_0, y_0, z_0)$, t_1 időpontban pedig $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és így tovább. Azt látjuk tehát, hogy minden időpillanatban a hely koordinátáihoz (x, y, z) hozzáadódik egy érték, amely a mozgás, tehát az idő függvénye: $x_{i+1} = x_i + v_x(t_i)$ és $y_{i+1} = y_i + v_y(t_i)$ és $z_{i+1} = z_i + v_z(t_i)$.

Ha ezt látni akarjuk, akkor azt tesszük, hogy minden időpillanatban felvételt készítünk, amelyet hozzárendelünk a *P* ponthoz. Tehát egy számnégyest kapunk: $P(x,y,z,t)$. Eddigi ismereteink szerint ez egy négy-dimenziós euklideszi-tér lesz, hiszen – mint eddig – a dimenziókat egy számegyenes jelképezi, amelynek értelmezési tartománya a valós számok.

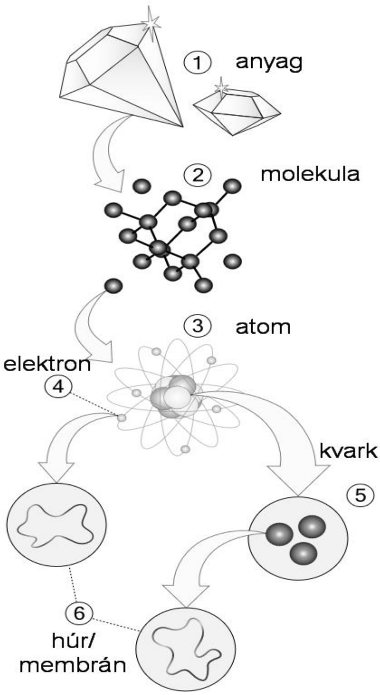
Kíséreljük meg a pont mozgásának értelmezését ebben a koordináta-rendszerben!

Az egyszerűség kedvéért – hogy ábrázolhassuk is – legyen a pont mozgási tere a sík, azaz két-dimenziós tér, így lehetőségünk nyílik az idő ábrázolására is. Szóval a pont elmozdul P_1-ből P_2-be t_1 idő alatt. Rajzoljuk ezt fel a $P(x,y,t)$ három-dimenziós térbe! Hol lesznek ezek a pontok? Mindig az *{(x, y)}* síkban, onnan nem lép ki! Akkor az ábrázolásunk szerint *t=0*, aminek következménye, hogy a pont mozgása időfüggetlen, ami természetesen nem igaz! Következéskép ez a megoldás nem alkalmas mozgás leírására. A valóság az, hogy a pont P_1-ből P_2-be egyik esetben t_1, a másik esetben t_2 és így tovább, idő alatt jut el. Tehát, ha a korábban javasolt „pillanatfelvételeket” elkészítjük, akkor azt látjuk, hogy a t idő hosszától függően sűrűbben, vagy ritkábban látjuk a pontot: ha a pont gyorsabban – rövidebb idő alatt – halad, akkor ritkábban látjuk a pontot. Egy új fogalomhoz jutunk – miként Galilei is annak idején – ez a sebesség, azaz a *t* idő és a *t* idő alatt megtett *s* út hányadosa: $v = \frac{s}{t}$.

A megoldás tehát erre a négy-dimenziós rendszerre, azaz a dinamikus pont helyének meghatározása az alábbi, ha $x_2 = x_1 + v_x(t)$ és $y_2 = y_1 + v_y(t)$ és $z_2 = z_1 + v_z(t)$, akkor $\overline{P_1P_2} = s = \mathbf{v}t$, mivel $x_2 - x_1 = v_x t$ és $y_2 - y_1 = v_y t$ valamint $z_2 - z_1 = v_z t$

akkor egy olyan új rendszert kell alkotnunk, amelyben ez az ellentmondás feloldódik.

A legfontosabb ilyenkor annak meghatározása, hogy az eddigi tudásunknak hol van a határa, azaz meddig és hogyan használhatjuk. Csak ezután kerülhet sor új hipotézisek felállítására, amellyel az ellentmondások feloldását képzeljük el.



41. ábra. Az anyag felépítése

A kvantumfizika az anyag felépítésében az ábra szerinti felépítésig jutott. Az anyagi részek eltérően viselkednek, ezért újabb tereket értelmez a kvantum-fizika világa. Itt, most csak vázlatosan érintjük ezeket. Az egyik ilyen az *erőterek kvantumelmélete*, amelyben a töltött részecske (például, elektron, proton) és az elektromágneses erőtér (foton) kölcsönhatása írható le. A dimenziók itt a részecskék, illetve a fotonok lehetséges állapotai, ezáltal lehetővé válik ezek egymásra hatásának megkülönböztetése, leírása. Az elméleti és a kísérleti fizika egymás támogatja az újabb és újabb felfedezésekben. Például a számítások azt mutatják, hogy kell léteznie a Higgs kimutatta bozonnak, a részecske-gyorsító feladata ennek kísérleti kimutatása, vagy éppen annak felfedezése, hogy itt egy új világ nyílt meg.

Törekvések – elméleti – vannak a tér fogalom kiterjesztésére a húr és membránelmélettel, amelyben a részecskék 26, 11, illetve 10 dimenziós térben – az elméleti változatoktól függően - lennének leírhatók. Egyes fizikusok véleménye szerint segítségével a relativitáselmélet és a kvantumfizika összekapcsolható lenne. Ha az Univerzumunk egységes egész, akkor kell lennie egysége modelljének is, mondják.

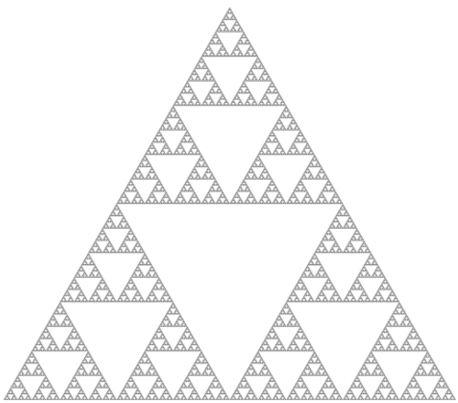
...És a tudomány kereke forog tovább.

A fraktálok

A legismertebb fraktálok önhasonlóak és olyan részekből állnak össze, amelyek mindegyike nagyítással az egészbe vihető. Például a képen látható Sierpiński-háromszöget (amely úgy áll elő, hogy egy szabályos háromszögből kivesszük az oldalfelező pontok által meghatározott belső háromszöget, majd az így nyert háromszögekből is, és így tovább a végtelenségig) három kisebb háromszög alkotja, amelyek mindegyike feleakkora, mint az eredeti.
Belátható, hogy ha egy fraktál *k* olyan alkotóelemből áll össze, amelyek mindegyikének *r*-szerese az eredeti, akkor a Hausdorff-dimenziója $\frac{\log k}{\log r}$.

A Sierpinski-háromszögnek így $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}59$ a Hausdorff-dimenziója.

Általánosan fogalmazva, ha az egyes alkotóelemek $r_1, r_2, \ldots, r_i$ arányban kisebbek az egésznél, akkor a Hausdorff-dimenzió az az *s* szám, amelyre $\sum_i r_i^s = 1$ teljesül.



54. ábra. Sierpinski háromszög

Néhány érték különböző Hausdorff-dimenziókra:

- az *n* dimenziós euklideszi téré: n;
- az *n* dimenziós gömbé: n;
- megszámlálható ponthalmazoké: 0;
- a Cantor-halmaz: $\frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63$;
- a Sierpiński-szőnyegé: $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,89$;
- a Menger-szivacsé: $\frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,73$;
- a Koch-hópehelyé: $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$.
- térkitöltő görbék (pl. a Peano-görbe vagy a Sierpinski-görbe) Hausdorff-dimenziója megegyezik annak az alakzatnak a dimenziójával, amit kitöltenek.
- a (legalább kétdimenziós) Brown-mozgás pályájának Hausdorff-dimenziója majdnem biztosan 2.

16 Utószó

A dimenziók tanulmányozásához felépítettünk koordináta-rendszereket, amelyekkel – mint kiderült – tereket alkothatunk, azaz tulajdonságokat rendelhetünk a térhez, tartalmától függetlenül. A kanti filozófia az anyagi világot – *szubsztancia* – és a világról alkotott általános ismereteinket – *forma* – még az abszolútnak feltételezett térben és időben helyezte el. Eleink természetesnek tartották, hogy három-dimenziós világunk végtelen és érvényes Archimédesz állítása: adjatok a Földön kívül egy pontot és én kimozdítom a Földet a helyéből – tipikus példája a mechanisztikus világba vetett hitnek.

Megdöbbentő felfedezés lett, hogy a gömbfelületen a végtelen azt jelenti, hogy visszajutunk a kiindulási pontba, ha elég sokat megyünk és az ilyen végtelen világnak – a végtelensége ellenére – van széle. Következéskép lehet valami rajta kívül. A negyedik dimenzió nyújt segítséget a megértéséhez. Kiderül, hogy a három-dimenzióban fedésbe nem hozható szimmetrikus alakzatok egy negyedikben fedhetik egymást. Gyakorlati példa erre – igaz, két-dimenziós – a lepke szárnyai, amelyek szimmetrikusak, mégsem hozhatók fedésbe a síkon. de a térben igen. Másik példa H. G. Wells egyik hősének esete, aki a negyedik-dimenzióba látogatott és onnan a tükörképe jött vissza, például a szíve a jobboldalra került.

A tény, hogy egy gömbfelületen létezünk és az egyáltalán nem euklideszi. Mégis, a hatalmas méretek jóvoltából, még teljesen jól használható ez a geometria, de a Föld felfedezése és az utazások, a térkép igénye már felvetette a korlátokat és új megoldásokat igényelt. A gondolkodásmód tovább fejlesztése elvezetett oda. hogy tudásunk képessé vált különböző tereket felépíteni és megmutatni, hogy euklideszi látásmódunknak határai vannak.

A „térbeli látás” furcsaságai eladdig a művészek „tudománya” volt, akik két-dimenzióban megrajzolták, megfestették a három-dimenziót, sőt mindenkori törekvésük az emberi gondolat kifejezése is alkotásaikban. A művészek perspektíváiból nőtt ki a *projektív*

geometria, mint exakt tudomány, vagy a már nem is a kezdeteit élő *virtuális világ* a számítástudományban.
Gauss korában a matematika belenyúlt a művészek eme világába és megteremtette egyszerre a nem–euklideszi terek szemléletét és a háromnál több dimenzió értelmét. Ebben élenjáró tudósunk Bólyai János. Nem kellett sok idő és a fizika létrehozta – Einstein - ezeken a gyökereken világunk új, relativisztikus képét.
Az egész lényege egy matematikai absztrakció, feltevés, hogy létezik bármilyen anyagtól – szubsztanciától – független tér, amelynek leírhatjuk törvényszerűségeit és azok változatlanok maradnak – invariánsak. Az ennek megfelelő fizikai törvények, mivel invariánsak, érvényesek minden anyagra az adott térben. No, és persze a matematika eszközeivel pontosan leírhatók és ezáltal bárki, aki megérti azt, használhatja a maga tevékenységére. A lényeg talán éppen ez, minden matematikai eredmény sorsa, célja eddig is ez volt. És a dolgok folynak tovább, spekulációinknak nincs és valószínűleg sohasem lesz vége, amíg csak ember létezik a maga szüntelen kíváncsiságával. Megnyugtató lehet ez a jövő generációi számára, - akiknek ezt az írást ajánlom – marad még nekik munka, feladat, érdekesség, felfedeznivaló. A térinformatika, a virtuális valóság és ezek alkalmazása a végtelen lehetőségek tárháza.
Ez a dolgozat – előadások összefoglaló anyaga – is ezt a célt szolgálja: népszerűsíteni, közismertté tenni a dimenziókkal kapcsolatos matematikai eredményeket, hogy minél többen élhessenek vele, használhassák és helyesen, saját céljaikra. Tudomásul kell vennünk, hogy az újszülöttek feje nem tartalmazza ezeket az ismereteket, ugyanakkor a társadalom nem is ezeket tartja elsődlegesnek. Mindezeken túl a matematikus tudást fontosnak tartom, tartjuk sokan, - az élet szinte minden területén. Figyelemmel a társadalmi elvárásokra, alázattal, de igényesen kell terjesztenünk ezt a matematikai tudást.
Remélem, evvel az összeállítással szolgálom ezt a célt.
Olvassák, tanulmányozzák olyan érdeklődéssel, amilyen szeretettel készült!